Master 1 Informatique

Initiation à la recherche – LMV

Exercices

On considère le système de déduction naturelle de la figure 1 et le système de types d'un λ-calcul simplement typé à la figure 2.

Dans ces figures, les formules logiques sont définies par :

— A, B, ... sont des propositions atomiques,
— si F_1 et F_2 sont des formules logiques, $F_1 \rightarrow F_2$ est une formule logique lue « F_1 implique F_2 »,
— si F_1 et F_2 sont des formules logiques, $F_1 \vee F_2$ est une formule logique lue « F_1 ou F_2 »,
— si F_1 et F_2 sont des formules logiques, $F_1 \wedge F_2$ est une formule logique lue « F_1 et F_2 »,
— l'opération $\wedge$ a priorité sur l'opération $\vee$ et ces deux opérations ont priorité sur $\rightarrow$.

On suppose un ensemble $\mathcal{X}$ de variables, les programmes sont définis par :

— si $x \in \mathcal{X}$, x est un programme,
— si e_1 et e_2 sont des programmes, $e_1\ e_2$ est un programme (application),
— si $x \in \mathcal{X}$ et e est un programme, $\lambda x.e$ est un programme (abstraction),
— si e_1 et e_2 sont des programmes, (e_1, e_2) est un programme (paire),
— si e est un programme, $\texttt{fst}\ e$ et $\texttt{snd}\, e$ sont des programmes (projections),
— si e est un programme, $\texttt{inl}_{\texttt{F}_1,\texttt{F}_2}\ e$ et $\texttt{inr}_{F_1,F_2}\, e$ sont des programmes (alternatives),
— si e, e_1, e_2 sont des programmes alors $\texttt{match}\ e\ \texttt{with}\ x \ \Rightarrow\ e_1 \mid y \ \Rightarrow\ e_2$ est un programme (filtrage de motifs).

Dans la figure 1, Γ est un ensemble de formules. Dans la figure 2, Γ est un ensemble de couples variable et formule.

Questions Pour les propositions suivantes :

— Donnez un arbre de dérivation en déduction naturelle
— Donnez un programme représentant cet arbre

1. **permutation :** $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$
2. **association :** $(A \wedge B) \wedge C \rightarrow A \wedge (B \wedge C)$
3. **elimination :** $(A \wedge B) \rightarrow A$
4. **distribution :** $(A \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
5. **disjonction 1 :** $A \rightarrow (A \vee C)$
6. **disjonction 2 :** $B \rightarrow (A \vee B)$
7. **currying :** $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$
8. **uncurrying :** $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \wedge B) \rightarrow C$
9. **raisonnement par cas :** $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B) \rightarrow C$

$$(v)\frac{F_1 \in \Gamma}{\Gamma \vdash F_1} \qquad (i)\frac{\Gamma \cup \{F_1\} \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \to F_2}$$

$$(a)\frac{\Gamma \vdash F_1 \to F_2 \qquad \Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_2}$$

$$(p)\frac{\Gamma_1 \vdash F_1 \qquad \Gamma_2 \vdash F_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash F_1 \wedge F_2}$$

$$(\pi_1)\frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_1} \qquad (\pi_2)\frac{\Gamma \vdash F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash F_2}$$

$$(l)\frac{\Gamma \vdash F_1}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2} \qquad (r)\frac{\Gamma \vdash F_2}{\Gamma \vdash F_1 \vee F_2}$$

FIGURE 1 – Déduction naturelle

$$(V)\frac{x : F_1 \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : F_1} \qquad (I)\frac{\Gamma \cup \{x : F_1\} \vdash e : F_2}{\Gamma \vdash (\lambda x{:}F_1.e) : F_1 \to F_2}$$

$$(F_1)\frac{\Gamma \vdash e : F_1 \to F_2 \quad \Gamma \vdash e' : F_1}{\Gamma \vdash (e\ e') : F_2}$$

$$(P)\frac{\Gamma_1 \vdash e_1 : F_1 \qquad \Gamma_2 \vdash e_2 : F_2}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash (e_1, e_2) : F_1 \wedge F_2}$$

$$(\Pi_1)\frac{\Gamma \vdash e : F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash \texttt{fst}\ e : F_1} \qquad (\Pi_2)\frac{\Gamma \vdash e : F_1 \wedge F_2}{\Gamma \vdash \texttt{snd}\ e : F_2}$$

$$(L)\frac{\Gamma \vdash e : F_1}{\Gamma \vdash \texttt{inl}_{F_1,F_2}\ e : F_1 \vee F_2} \qquad (R)\frac{\Gamma \vdash e : F_2}{\Gamma \vdash \texttt{inr}_{F_1,F_2}\ e : F_1 \vee F_2}$$

FIGURE 2 – λ-calcul typé